L.B. Monastir	**Devoir de contrôle n : 1**	3 ème Math
P.P. : Ali Zouhaier	Durée : 2 heures	**2013 / 2014**

Exercice 1 (4 points)

Répondre par **vrai** ou **faux** en **justifiant**.

1/ La fonction $f: x \mapsto -3x^5 + 7x^4 - 2x^2 + 2013$ est bornée sur l'intervalle $[2013;\ 2014]$.

2/ On considère un triangle ABC tel que $AB = 3$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 9$.
Le triangle ABC est rectangle en B.

3/ $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$.

4/ **On** donne le tableau de variation de f.

x	-3		1		4
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1

L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $[-3; 4]$.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $IR \backslash \{2\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+7} - 4\right)}{x^2 - 9} & \text{si } x > 3 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{|x-2|} & \text{si } x \in]-\infty; 3] \backslash \{2\} \end{cases}$$

1/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2/ Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

3/ Etudier la continuité de f à gauche et à droite en 3.

4/ f est elle prolongeable par continuité en 2 ?

5/ Prouver que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $[4; 5]$

6/ Prouver que f est bornée sur $]3; +\infty[$.

Exercice 3 (6 points)

On considère un parallélogramme ABCD tel que $AB = 5$; $AD = 4$ et $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$.

I le milieu de $[AD]$ et H le projeté orthogonal de D sur (AB).

1) Calculer $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

2) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et en déduire AH

3) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AD^2 - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA}$.

4)**a**) Montrer que pour tout point M du plan on a $MA^2 + MD^2 = 2\,MI^2 + 8$.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MD^2 = 16$.

5) On muni le plan P, conteant A, B et C, au repère orthonormé $R=\left(H;\frac{1}{HA}\overrightarrow{HA},\frac{1}{HD}\overrightarrow{HD}\right)$.

Donner une équation cartésienne de l'ensemble Δ des points M vérifiant

$MA^2 - MD^2 = 16$.

Exercice 4 (4 points)

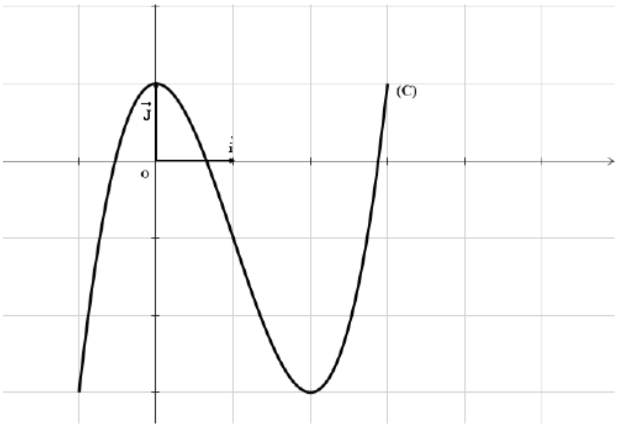
On donne ci-dessous, la courbe représentative l'une fonction f définie sur [-1 ; 3].

1/ Justifier la continuité de f sur [-1 ; 3].

2/ Déterminer graphiquement le sens de variation de f sur [-1 ; 3].

3/ Déterminer graphiquement l'image par f des intervalles [0 ;2] et]-1 ; 1[.

4/ Montrer que l'équation f(x) = x admet dans [0 ;1] une seule solution .



BON TRAVAIL

Exercice 1

1/ Vrai.

f est un polynome donc f est continue sur $\left[2013;\ 2014\right]$

donc $f\left(\left[2013;\ 2014\right]\right) = \left[m;\ M\right]$ avec m est la valeur de f sur $\left[2013;\ 2014\right]$ et M sa valeur maximale sur le même intervalle.

Alors $\forall x \in \left[2013;\ 2014\right];\ m \leqslant f(x) \leqslant M$ par suite f est bornée.

2/ Vrai

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 9 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 9$

$\Leftrightarrow 9 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 9 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$ ABC est un triangle rectangle en B

3/ Faux

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$

Donc $\forall x \in IR;\ x^2 - 3x + 2 =$

alors $\forall x \in [1;2]$ $(x-1)(x-2) \leqslant 0$ d'où $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$.

4/ Vrai

. f est croissante sur $[-3;1]$ donc $\forall x \in [-3;1];\ f(x) \geqslant 2 > 0$

donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[-3;1]$

. f est continue et strictement croissante sur $[1;4]$ et $f(1) \times f(4) < 0$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $[1;4]$

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $[-3;4]$

Exercice 2

1/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{-x + 2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty.$

2/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+7} - 4\right)}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(\sqrt{x^2\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)} - 4\right)}{x^2 - 9}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(|x|\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} - 4\right)}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} - \frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} - \frac{4}{x}}{1 - \frac{9}{x^2}} = 1.$

3/ ♦ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0 = f(3)$

donc f est continue à gauche en 3.

♦ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+7} - 4\right)}{x^2 - 9}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+7} - 4\right)\left(\sqrt{x^2+7} + 4\right)}{(x^2 - 9)\left(\sqrt{x^2+7} + 4\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x(x^2 - 9)}{(x^2 - 9)\left(\sqrt{x^2+7} + 4\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+7} + 4} = \dfrac{3}{8} \neq f(3) = 0$

Donc f n'est pas continue à droite en 3.

4/ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} (x-3) = -1.$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} (3-x) = 1.$

Donc f n'a pas de limite en 2 par suite f n'est pas prolongeable par continuité en 2.

5/ la fonction $(x \mapsto x^2+7)$ est continue et positive sur $[4;5]$

Donc la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{x^2+7}\right)$ est continue sur $[4;5]$

Alors la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{x^2+7}-4\right)$ est continue sur $[4;5]$

De plus la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{x}{x^2-9}\right)$ est continue sur $[4;5]$

Donc la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+7}-4\right)}{x^2-9}$ est continue sur $[4;5]$

de plus $f(4) = 0.45476 < \dfrac{1}{2}$ et $f(5) = 0.51777 > \dfrac{1}{2}$

Donc d'après le théorème intermédière l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $[4;5]$.

6/ $\forall x \in]3;+\infty[;\ f(x) = \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+7}-4\right)}{x^2-9}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}+4}.$

. $\forall x \in]3;+\infty[;$ donc $x>0$ par suite $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}+4} > 0.$

. $\forall x \in]3;+\infty[;\quad x^2+7 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+7} > \sqrt{x^2}$ on déduit aussi $\sqrt{x^2+7}+4 > x$ par suite $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}+4} < 1 \Rightarrow f(x) < 1.$

Ainsi $\forall x \in]3;+\infty[;\ 0 < f(x) < 1$ alors f est bornée sur $]3;+\infty[$.

Exercice 3 (6 points)

1) . $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{DH} = 0$ car $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{DH}$

. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$= -AD^2 = -16.$

2) . $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\widehat{BAD} = 5 \times 4 \times \cos\dfrac{\pi}{3} = 5 \times 4 \times \dfrac{1}{2} = 10.$

. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH$

Ainsi $AB \times AH = 10 \Leftrightarrow AH = \dfrac{10}{AB} = 2.$ Conclusion: AH=2.

3) . $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD}$

$= AD^2 + \overrightarrow{DB}.\left(-\overrightarrow{DA}\right) = AD^2 - \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}.$

4)**a**) $\forall M \in P$

$MA^2 + MD^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MD}^2 = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2$

$= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)^2$ car $I = A * D$

$= MI^2 + 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 - 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2$

$= 2\,MI^2 + 2\left(\dfrac{4}{2}\right)^2 = 2MI^2 + 8.$

b) $MA^2 + MD^2 = 16 \Leftrightarrow 2MI^2 + 8 = 16$

$\Leftrightarrow MI^2 = 4$

$\Leftrightarrow MI = 2$

$\Leftrightarrow$ M $\in (\mathcal{C})$ le cercle de centre I et de rayon 2.

5/ . $AH = 2$.

. $\sin\widehat{HAD} = \dfrac{DH}{AD} \Leftrightarrow DH = AD \times \sin\dfrac{\pi}{3} = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Ainsi dans le repère $R=\left(H; \dfrac{1}{HA}\overrightarrow{HA}, \dfrac{1}{HD}\overrightarrow{HD}\right)$ on a : $A\left(2;\ 0\right)$ et $D\left(0, 2\sqrt{3}\right)$

$M(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow MA^2 - MD^2 = 16$

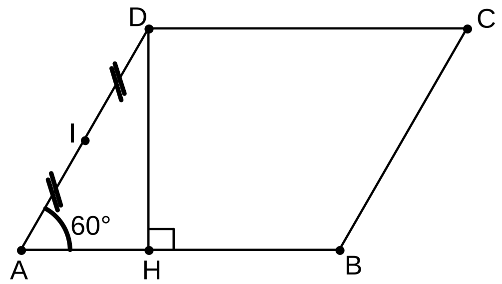
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 - (x-0)^2 - \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2 = 16$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - x^2 - y^2 + 4\sqrt{3}y - 12 = 16$

$\Leftrightarrow -4x + 4\sqrt{3}y - 24 = 0$

$\Leftrightarrow -x + \sqrt{3}y - 6 = 0$

Conclusion : $\Delta : -x + \sqrt{3}y - 6 = 0$



Exercice 4

1/ La courbe de f ne présente aucune rupture donc f est continue sur [-1 ; 3].

2/

x	−1	0	2	3
f(x)	↗	↘	↗	

3/ $f([0;2]) = [-3;1]$; $f(]-1;3[) =]-3;1]$

4/ En traçant la droite $\Delta : y = x$ on voit que (C) et Δ ont un seul point d'intersection d'abscisse dans $[0;1]$ donc l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution dans $[0,1]$